

CREAM Publication No. 2 - 2015

# Agglomerasjonsmodell

Tom-Reiel Heggedal, Espen R. Moen og Christian Riis

# Agglomerasjonsmodell

Tom-Reiel Heggedal, Espen R. Moen og Christian Riis  
Handelshøyskolen BI

December 1, 2015

Redusert reisetid mellom byer og tettsteder gir større og mer integrerte markeder, og kan gjennom det påvirke produktivitetsutviklingen. Det er flere kanaler for slike virkninger, som alle har vært analysert i litteraturen. La oss gi noen eksempler. Økt rivalisering påvirker seleksjonen av bedrifter som overlever i markedet.<sup>1</sup> Det kan videre være skalaeffekter i produksjonen, både på sluttbruker- og innsatsfaktornivå, som gir gevinster ved integrasjon av markeder.<sup>2</sup> Dernest er det potensielle produktivitetsgevinster gjennom arbeidsmarkedet som følge av mer effektiv «matching» av kompetanse og bedrifter.<sup>3</sup> Endelig kan et mer integrert marked forsterke lærings- og kunnskapsdynamikken.<sup>4</sup>

Disse eksemplene representerer svært ulike mekanismer i en økonomi, men de har det til felles at de forsterkes ved økt tetthet av bosettings- og produksjonsstruktur, og omtales som derfor ofte som agglomerasjonseffekter. Det er vel dokumentert at effekter av denne type kan identifiseres, og at de i så måte er relevante effekter i en vurdering av nytte versus kostnadselementene i samferdselsprosjekter, se diskusjonen i Venables (2007). Det er imidlertid en stor utfordring å vurdere relevansen og styrken på de ulike mekanismene i konkrete prosjekter. Det taler for at en er konservativ i tallfestingen.

En viktig prinsipiell utfordring er å korrigere analysen for sorteringseffekter som øker verdiskapingen i en region som følge av at høyproduktive arbeidskårsressurser migrerer. Hvis bedre infrastruktur øker tilgangen av produktiv arbeidskraft gjennom økt mobilitet, er nettobidraget til samfunnet den mergevinsten som genereres i samspillet mellom kvalifisert arbeidskraft og andre ressurser i byene; men da slik at en må korrigere for redusert verdiskaping i områder som ressursene trekkes fra.

I den internasjonale litteraturen har det spesielt vært fokusert på betydningen for produktivitetsutviklingen av økt befolkningstetthet i byer. I vår analyse er økt tetthet generert gjennom redusert reisetid og reisekostnad, og derved stimulerer samspillet mellom produktive ressurser i en region – det som vi i modellen omtaler som antallet interaksjoner. Hvor sterk denne effekten er, vil avhenge av bosettingsmønsteret. En bru eller en tunnel, som reduserer reisetiden mellom regioner, vil knytte visse områder tett sammen, men fremdeles med betydelig avstand mellom andre deler av regionene. Det betyr at produktivitetseffektene ikke er uniformt fordelte over regionene, men virker sterkere i noen deler enn i andre. Et viktig

---

<sup>1</sup>Se for eksempel Behrens m.fl. (2014).

<sup>2</sup>Se for eksempel Davis m.fl. (2014).

<sup>3</sup>Se for eksempel Bernard m.fl (2015), Eeckhout m.fl (2014) og Davis og Dingel (2014).

<sup>4</sup>Se for eksempel Caslino og Kerr (2014) og Davis og Dingel (2012).

element i vår beregning er derfor å fange opp implikasjonene av avstand for agglomerasjonseffekter. Vi gjør det ved å «diskontere» avstand i betydningen at agglomerasjonseffektene forbundet med samspillet av produktive ressurser avtar i avstanden mellom dem.

## 1 Empiriske estimater av agglomerasjonseffekter

Som nevnt ovenfor er agglomerasjonseffekter en samlebetegnelse for svært ulike mekanismer som har det til felles at de stimuleres av økt befolkningstetthet. Det er grunn til å tro at infrastrukturinvesteringer som knytter befolkningskonsentrasjoner tettere sammen, vil kunne gi effekter langs flere av de samme dimensjonene. Vi vil derfor ikke her forsøke å identifisere enkeltårsaker, men benytte estimater fra etablerte studier for makroeffekter av økt effektiv populasjon som en tilnærming – riktignok med den viktige modifikasjon at vi tar eksplisitt hensyn til at avstand har en dempende effekt.

En tidlig oversikt over empiriske studier av agglomerasjonseffekter er presentert i Rosenthal og Strange (2004). Det er flere studier som forsøker å analysere effekten av bystørrelse på produktiviteten på aggregert nivå. Rosenthal og Strange (2004) finner estimater for endringen i arbeidskraftproduktiviteten, som følge av en dobling av bystørrelsen, i intervallet 3 til 8 prosent. Andre studier analyserer virkningen av sysselsettingstetthet i et område på produktiviteten i det samme området. I en slik beregning finner Rosenthal og Strange (2004) en elastisitet av arbeidskraftproduktiviteten med hensyn på sysselsettingstettheten på omtrent 0,05. Størrelsesordenen på denne elastisiteten er også bekreftet i nyere studier som Combes et.al. (2008) og Behrens et.al. (2014). I en artikkel av Davis et.al. (2014) analyseres i hvilken grad produksjonstettheten i et område kan påvirke produktiviteten i det samme område. De estimerer effekten av en dobling av produksjonstettheten på totalfaktorproduktivitet til å være 4,1 prosent. Ahfeldt et.al (2014) analyserer effekten av Berlinmurens fall på produktiviteten i Berlin. De finner at produktivitetselastisitet med hensyn på tettheten i arbeidsområdet er 0,07. Forfatterne påpeker at denne produktivitetseffekten avtar vesentlig med reisetider.

Oppsummert finner den empiriske litteraturen en signifikant positiv elastisitet for produktiviteten med hensyn på populasjonsstørrelse eller populasjonstetthet, og at denne varierer rundt 0,05.

I tillegg er, som nevnt, både distanse mellom områder, og distanse internt i en region, av betydning for styrken på agglomerasjonseffektene. Et viktig moment i vår analyse er å definere områdebegrepet slik at vi tar hensyn både til distansen mellom områdene og internt i områdene. I hvilken grad agglomerasjonseffekter avtar med avstand er studert i noen arbeider. Duranton et.al. (2005) finner positive effekter på industriproduktivitet som følge av samlokaliseringseffekter, men at disse er små for avstander som overstiger 50 kilometer. Lignende resultater er også påvist i Graham et. al. (2009). Dette gir opphav til en ikke-linearitet i sammenhengen mellom avstand og agglomerasjonseffekter. I modellen veker vi derfor agglomerasjonseffektene ned med distanse. Detaljer i dette drøftes nærmere i neste kapittel der vi presenterer modellen.

## 2 Agglomerasjonsmodellen

Litteraturen om agglomerasjonseffekter er etterhvert blitt omfattende, men er stadig under utvikling. I litteraturen analyseres alternative forklaringsmekanismer, og det pekes på en rekke mulige mekanismer som kan forklare effektene. Det er imidlertid ingen generisk modell for agglomerasjonseffekter, det er et tilfang av dels mer partielle modeller, som analyser enkelteffekter, til mer generelle likevektsmodeller som forsøker å fange opp virkningene på aggregert nivå.

Selv om dette er en litteratur under utvikling, er det generelt akseptert at det er kausale sammenhenger mellom befolkningskonsentrasjon og produktivitet, se for eksempel Behrens et.al. (2014). I en analyse av nettogevinstene ved bedret infrastruktur mellom befolkningskonsentrasjoner, er dette effekter som må inkluderes.

Utgangspunktet for analysene av agglomerasjonseffekter i denne rapporten er at samferdselsinvesteringer ulike regioner tetter sammen, regioner som tidligere i mindre grad var integrerte. Det gir rom for sterkere økonomiske koblinger mellom regionene, uten at det finner sted en full befolkningsmessig integrasjon.

Konkret tenker vi oss at produktivetsgevinstene er knyttet til et samspill mellom produktive ressurser, og jo kortere avstanden er mellom lokaliseringen av ulike ressurser, desto sterkere blir produktivitetseffekten – enten det er som følge av at sannsynligheten for en kobling øker, eller det er den direkte effekten av at kostnadene ved interaksjonen blir lavere.

I analysen fanger vi opp betydningen av avstand ved å benytte interaksjoner som måleenhet. For to individer med samme lokalisering definerer vi interaksjonen til 1, noe som er ren normalisering. Jo større geografisk avstand det er mellom individer, desto lavere blir interaksjonstallet.

Agglomerasjonseffekter fanges opp ved at individer, gjennom interaksjon med andre individer, skaper verdier – enten det nå er gjennom arbeidsmarkedet (mer effektiv matching), kunnskapsmarkedet (læring og kunnskapsspredning) eller kapitalmarkedet (bedriftsdannelser). Ved å bedre infrastrukturen, reduseres reisetiden og antallet interaksjoner øker.

Samlet verdiskaping vil i modellen avhenge av antallet aggregerte interaksjoner. Vi beregner den relative økningen i aggregerte interaksjoner som følger av investeringene. Basert på dette målet benytter vi produktivitetselastisiteter dokumentert i empiriske studier av agglomerasjonseffekter.

Modellen vi setter opp er stilisert, men spesifisert med sikte på å fange opp de essensielle mekanismene. Modellen består av tre sett av parametere:

- Befolkningstetthet og fordeling av denne over berørte regioner
- Avstandsmål avhengig av tiltak
- Den dempende effekten av avstand på interaksjon, representert ved en parameter  $\gamma$ .

Vi begynner med den sistnevnte parameteren. Vi lar distanse diskonteres med en faktor  $\gamma$ , dvs intensiteten i en kobling mellom individ  $i$  og individ  $j$  er

$$e^{-\gamma\delta_{ij}},$$

der  $\delta_{ij}$  er avstanden mellom dem og  $\gamma$  er en gitt positiv parameter.  $\delta_{ij}$  kan gis en videre tolkning en tidsavstand. Eksempler kan være kommunikasjon (koding, språk), kontrakter, osv. For samferdselsinvesteringer kan den videre modifiseres til å gjenspeile relevante forskjeller mellom ulike former for transport.

I modellen betrakter vi alle regioner som del av en felles økonomisk region, men med ulike befolkningstettheter over intervaller. Det betyr at områder mellom kommuner kan betraktes som områder med null tetthet. Videre kan vi nå også differensiere tettheten internt i regioner, f.eks med høyere tetthet i visse områder (sentra).

I fremstillingen lar vi de ulike områdene være organisert på en linje. Det er mer en fremstillingsteknisk forenkling, og modellen kan lett modifiseres på dette punktet.

For agglomerasjonseffektene av samferdselsinvesteringer kan det trekkes et skille mellom infrastrukturer som består av noder (f.eks. togstasjoner), og strukturer uten noder (f.eks. vei). En veistruktur vil monotont redusere avstanden mellom lokaliseringer gjennom korteste direkte avstand, mens et nodesystem blir mer sammensatt ved at avstand måles via nodene.

Vi stiller derfor først opp som grunnmodell en beregning av effektive koblinger mellom individer innenfor et rent veisystem. Deretter inkluderer vi nodebasert samferdsel.

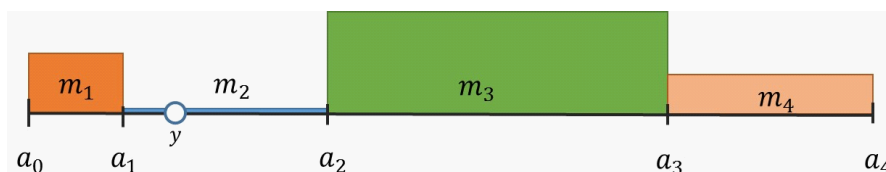
### 3 Grunnmodellen

Utgangspunktet for beregningen er avgrensningen av den relevante økonomiske regionen. Den skal inkludere alle områder som berøres av investeringene. Dernest må den relevante økonomiske regionen deles inn i områder. Prinsippet er her å velge en inndeling slik at befolkningstettheten ikke varierer for mye innenfor hvert enkelt område. En eksempel på en inndeling kan være å skille ut sentrum som et område med høy tetthet, forsteder med noe lavere, og områder mellom kommuner som et separat område med lav tetthet.

La oss illustrere det tekniske grunnprinsippene ved å tenke oss at den relevante økonomiske regionen består av fire delområder. Senere setter vi opp den generelle modellen.

Vi lar  $a_i$  angi grensene mellom områder med ulik tetthet.  $m_i$  representerer befolkningstettheten over området representert ved intervallet  $a_{i-1}, a_i$ .

En region med fire delområder kan illustreres slik.



Figur 1

Betrakt et individ med lokalisering  $y$ . Generelt er antallet effektive interaksjoner mellom et individ og øvrige individer i regionen, representert ved følgende integral, der avstand er diskontert med en faktor  $\gamma$ .

$$D(y) = \int_{a_0}^{a_1} e^{-\gamma|y-x|} m_1 dx + \int_{a_1}^{a_2} e^{-\gamma|y-x|} m_2 dx + \int_{a_2}^{a_3} e^{-\gamma|y-x|} m_3 dx + \int_{a_3}^{a_4} e^{-\gamma|y-x|} m_4 dx$$

Betrakter vi individet  $y$  med lokalisering i segmentet  $[a_1, a_2]$ , og la  $D_2$  uttrykke aggregatet av diskonterte koblinger for dette individet, gir integrasjonen følgende uttrykk

$$D_2(y) = \frac{1}{\gamma} \left[ \begin{aligned} &(e^{\gamma a_1} - e^{\gamma a_0}) e^{-\gamma y} m_1 + (2 - e^{\gamma a_1} e^{-\gamma y} - e^{-\gamma a_2} e^{\gamma y}) m_2 \\ &+ (e^{-\gamma a_2} - e^{-\gamma a_3}) e^{\gamma y} m_3 + (e^{-\gamma a_3} - e^{-\gamma a_4}) e^{\gamma y} m_4 \end{aligned} \right]$$

Vi finner dernest det aggregerte antallet interaksjoner i regionen,  $N$ , ved å integrere over alle individer i de fire områdene, dvs beregne uttrykket:

$$N = \int_0^{a_1} D_1(y_i) m_1 dy_i + \int_{a_1}^{a_2} D_2(y_i) m_2 dy_i + \int_{a_2}^{a_3} D_3(y_i) m_3 dy_i + \int_{a_3}^{a_4} D_4(y_i) m_4 dy_i$$

Utfører vi integrasjonen får vi  $N$  uttrykt som en sum av to kategorier av ledd. Den ene kategorien består av alle kryssleddene mellom individer i ulike områder. Integrerer vi over område  $i$  og område  $j$  finner vi det aggregerte antallet diskonterte koblinger på tvers av disse to regionene som:

$$\frac{2}{\gamma^2} (e^{-\gamma a_{j-1}} - e^{-\gamma a_j}) (e^{\gamma a_i} - e^{\gamma a_{i-1}}) m_i m_j$$

Den andre kategorien består av alle områdeinterne koblinger. Ser vi på område  $i$  og integrerer over alle individer i området, får vi et uttrykk for aggregatet av interne koblinger:

$$\frac{2}{\gamma} \left[ (a_i - a_{i-1}) - \frac{1}{\gamma} (1 - e^{-\gamma(a_i - a_{i-1})}) \right] m_i^2$$

Med  $M$  områder gir det følgende generelle formel

$$N = \frac{2}{\gamma} \left[ \begin{aligned} &\sum_{i=1}^M \left[ (a_i - a_{i-1}) - \frac{1}{\gamma} (1 - e^{-\gamma(a_i - a_{i-1})}) \right] m_i^2 \\ &+ \frac{1}{\gamma} \sum_{i=1}^{M-1} \sum_{j=i+1}^M [(e^{-\gamma a_{j-1}} - e^{-\gamma a_j}) (e^{\gamma a_i} - e^{\gamma a_{i-1}})] m_i m_j \end{aligned} \right]$$

Parameterne som representerer input i modellen er de geografiske posisjonene representert ved  $a$ -vektoren og befolkningstettheten i hvert område beregnet ved

$$m_j = \frac{M_j}{a_j - a_{j-1}}$$

der  $M_j$  er befolkningen i område  $j$ . Legg merk til at hvis avstand ikke diskonteres, dvs  $\gamma = 0$ , vil mengden av effektive koblinger være kvadratet av totalbefolkningen:

$$\begin{aligned} N &= \sum_{i=1}^M (a_i - a_{i-1})^2 m_i^2 \\ &+ 2 \sum_{i=1}^{M-1} \sum_{j=i+1}^M [(a_i - a_{i-1}) (a_j - a_{j-1})] m_i m_j \\ &= \sum_{i=1}^M M_i^2 + 2 \sum_{i=1}^{M-1} \sum_{j=i+1}^M M_i M_j \\ &= \left( \sum_{i=1}^M M_i \right)^2. \end{aligned}$$

### 3.1 Modifikasjoner

Kort omtale av mulige modifikasjoner:

- Som en forenkling i utledningen har vi lagt til grunn at den relevante regionen er representert ved en linje. Dette kan lett modifiseres. En triviell modifikasjon er å la hvert område ha sin respektive befolkning fordelt over en linje, men samtidig slik at hvert område er ulikt plassert i planet. I dette tilfellet vil den enkle lineære strukturen opprettholdes. En mer omfattende modifikasjon består i å fordele befolkningen innen hvert området over et plan. Grunnprinsippene for modellen er de samme ved disse modifikasjonene.
- I modellen så langt er det lagt til grunn full symmetri mellom områder. Dvs målet for effektive koblinger mellom region  $i$  og region  $j$  er uavhengig av koblingene mellom region  $j$  og region  $k$ . I noen modeller kan det være aktuelt å modifisere denne antakelsen og åpne for eksternaliteter forbundet med agglomerasjonseffekter. Følgende to eksempler illustrerer poenget:
  - *Negative eksternaliteter*: hvis området  $j$  og  $k$  knyttes nærmere sammen, kan man se for seg at det kan ha en isolert negativ effekt på koblingene mellom  $i$  (som nå blir mer perifer) og  $j$ . Dette kan fanges opp ved en mer sofistikert håndtering av avstandskonteringen.
  - *Uttømming av agglomerasjonseffekter*: som diskutert innledningsvis er agglomerasjonseffekter et samlebegrep for en rekke ulike økonomiske mekanismer. Noen av disse gevinstene kan være sterke hvis agglomerasjonen i utgangspunktet er lav, f.eks. verdien av et differensiert tilfang av kompetanse. Men etterhvert som områdene knyttes tettere sammen, blir effektene av ytterligere investeringer svakere (avtakende utbytte).

## 4 Bane versus vei

Investeringer i jernbane kompliserer beregningene siden reiseavstanden måles via noder. Ved at investeringene reduserer avstanden mellom noder, vil de berører ulike lokaliseringer på en prinsipiell måte enn ved veiinvesteringer.

La oss bygge opp modellen ved først å illustrere hvilken effekt baneinvesteringer har på den effektive koblingen mellom lokaliseringer mellom to noder. Følgende figur illustrerer dette tilfellet.



Figur 2

La  $s_0$  og  $s_1$  være to noder som er koblet med en bane som reduserer reisetiden mellom nodene. Før investeringen var avstanden mellom nodene  $s_1 - s_0$ , etter investeringen er den

reduisert til  $\delta_T$ . Tidsinnbesparingen mellom nodene blir følgelig

$$\Delta = s_1 - s_0 - \delta_T$$

La oss først ta for oss koblingene mellom to lokaliseringer  $(y, x)$  i segmentet  $[s_0, s_1]$ . Korteste avstand mellom  $y$  og  $x$  vil være med bane hvis  $y$  er tilstrekkelig langt til venstre og  $x$  er tilstrekkelig langt til høyre på segmentet. Konkret, betrakt en  $y$  nær  $s_0$ , som illustrert i figur 2.

La  $x(y)$  være lokaliseringen der den direkte avstanden  $[x(y) - y]$  er den samme som avstanden via nodene. Merk at avstanden ved en reise via nodene er representert summen av tre tidsintervaller:  $[y - s_0] + [\delta_T] + [s_1 - x(y)]$ . Ved å sette dette likt  $[x(y) - y]$  får vi bestemt  $x(y)$  slik:

$$x(y) = y + \frac{\delta_T + s_1 - s_0}{2} = y + \frac{\Delta}{2}$$

Dvs et individ med lokalisering  $y$  er indifferent mellom bane og bil i sin kobling mot lokaliseringen  $x(y)$ .

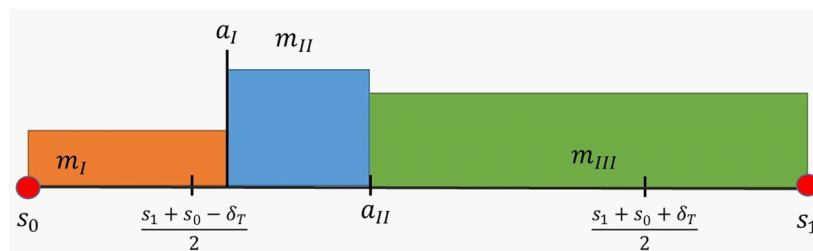
La  $x_s(y)$  representere lokaliseringen som er like langt fra  $y$  som  $s_1$  er fra  $y$ . Dvs  $x_s(y)$  er bestemt ved  $[x_s - y] = [y - s_0] + [\delta_T]$ , som gir

$$x_s(y) = 2y + \delta_T - s_0$$

Vi finner den største  $y$ -verdien der avstanden via nodene er korteste avstand til noen i segmentet  $[s_0, s_1]$  ved å sette  $x(y) = s_1$ , som gir

$$\begin{aligned} s_1 &= y + \frac{\Delta}{2} \\ y &= \frac{s_1 + s_0 - \delta_T}{2} \end{aligned}$$

Konkret betyr dette at *alle* individer med lokalisering i intervallet  $[s_0, \frac{s_1 + s_0 - \delta_T}{2}]$  har bane som korteste avstand til *noen* i intervallet  $[\frac{s_1 + s_0 + \delta_T}{2}, s_1]$ . Betrakt følgende figur:



Figuren er forenklet ved at vi har antatt at befolkningstettheten er uniform over segmentene  $[s_0, \frac{s_1 + s_0 - \delta_T}{2}]$  og  $[\frac{s_1 + s_0 + \delta_T}{2}, s_1]$ . Det kan lett generaliseres ved å integrere over delintervaller, men med økt kompleksitet i formlene uten at det tilføre noe mer intuisjon. Formelen nedenfor er derfor basert på forenklingen. I praktiske henseender vil dessuten disse to segmentene være nær de respektive sentra, og en antakelse om konstant befolkningstetthet synes uskyldig.



I analysen videre er det hensiktsmessig å definere noen nye variabler. Vi definerer  $d_{[a,b]}(y)$  som mengden effektive koblinger et individ lokalisert i  $y$  har til individer i segmentet  $[a, b]$ .  $d_{[a,b]}(y)$  tilfredsstiller følgende egenskap:

$$d_{[a,b]}(y) = e^{-(c-y)} d_{[a,b]}(c) \text{ for alle } y \leq c \leq a$$

Denne rekursive strukturen utnytter vi senere. Vil benytte også følgende notasjon.

$$n_{[a_j, a_{j+1}]}^{[a_k, a_{k+1}]} = m_{k+1} \int_{a_j}^{a_{j+1}} d_{[a_k, a_{k+1}]}(y) dy$$

dvs  $n_{[a_j, a_{j+1}]}^{[a_k, a_{k+1}]}$  er aggregatet av koblinger mellom individer i segmentet  $[a_j, a_{j+1}]$  og  $[a_k, a_{k+1}]$ .

Vi kan nå modifisere vår tidligere formel ved å foreta en separat beregning av koblingene mellom individene i intervallet  $[s_0, \frac{s_1+s_0-\delta_T}{2}]$  og det assosierte intervallet  $[\frac{s_1+s_0+\delta_T}{2}, s_1]$ . Dvs for enhver  $y$  i  $[s_0, \frac{s_1+s_0-\delta_T}{2}]$  integrerer vi over  $x$  i det relevante delsegmentet av  $[\frac{s_1+s_0+\delta_T}{2}, s_1]$ . Det er to essensielle egenskaper ved denne integreringen:

1. Integreringen må utføres "baklengs" siden, for enhver  $y$ , er lokaliseringen  $s_1$  nærmest og  $x(y)$  er lengst unna. Strengt tatt har dette bare betydning hvis befolkningstettheten varierer over segmentet.
2. Segmentet er på et lavere diskonteringsnivå siden lokaliseringen  $s_4$  har samme diskontering som  $x_s(y)$

For en gitt  $y \in [s_0, \frac{s_1+s_0-\delta_T}{2}]$  har vi følgende uttrykk for aggregerte koblinger til  $[a_{II}, s_1]$ . Merk at intervallet  $[a_{II}, s_1]$ , for hver  $y$ , kan deles i to – en del nærmest  $y$  der den direkte avstanden er kortest, og en ytre del der avstanden er kortest via nodene. De to segmentene gjenfinnes i følgende integral:

$$\begin{aligned} d_{[a_{II}, s_1]}(y) &= m_{III} \left[ \int_{a_{II}}^{y + \frac{\delta_T + s_1 - s_0}{2}} e^{-\gamma(x-y)} dx \right. \\ &\quad \left. + e^{-\gamma(y-s_0+\delta_T)} \int_0^{\frac{s_1+s_0-\delta_T}{2}-y} e^{-\gamma(\frac{s_1+s_0-\delta_T}{2}-y-z)} dz \right] \quad (1) \\ &= \frac{m_{III}}{\gamma} \left[ e^{-\gamma a_{II}} e^{\gamma y} + e^{-\gamma(-s_0+\delta_T)} e^{-\gamma y} - 2e^{-\gamma(\frac{s_1-s_0+\delta_T}{2})} \right] \end{aligned}$$

der, for gitt  $y$ , den største  $x$  slik at den direkte avstanden er kortest er

$$x(y) = y + \frac{\delta_T + s_1 - s_0}{2}$$

Den første delen tilsvarer tidligere beregning, neddiskontert avstand  $x - y$ . Den andre delen kan forklares slik: Avstanden fra  $y$  til  $s_1$  er  $y - s_3 + \delta_T$ , og vi avstandsdiskonterer det relevante segmentet med denne faktoren. Derne tar vi integralet "baklengs" over segmentet<sup>5</sup>  $[x(y), s_1]$ , et segment av lengde  $s_1 - x(y) = \frac{s_1+s_0-\delta_T}{2} - y$ .

---

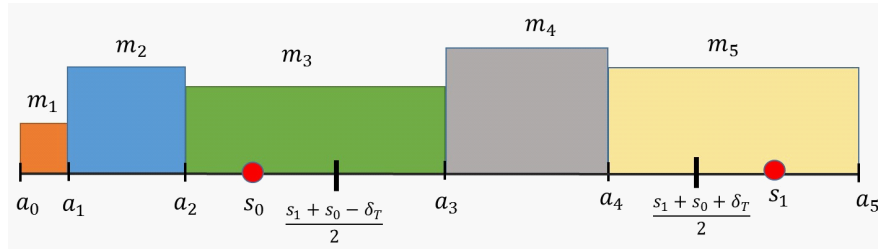
<sup>5</sup>Her spiller som nevnt retningen ingen rolle siden befolkningstettheten er konstant. Men generelt, hvis  $m(x)$  varierer spiller det en rolle.

Vi kan dernest finne mengden av koblinger som individene i intervallet  $[s_0, \frac{s_1+s_0-\delta_T}{2}]$  har til individene i intervallet  $[a_{II}, s_1]$ :

$$\begin{aligned} n_{\left[ \begin{smallmatrix} a_{II}, s_1 \\ s_0, \frac{s_1+s_0-\delta_T}{2} \end{smallmatrix} \right]} &= \frac{m_I m_{III}}{\gamma} \left[ \int_{s_0}^{\frac{s_1+s_0-\delta_T}{2}} \left[ e^{-\gamma a_{II}} e^{\gamma y} + e^{-\gamma(-s_0+\delta_T)} e^{-\gamma y} - 2e^{-\gamma\left(\frac{s_1-s_0+\delta_T}{2}\right)} \right] dy \right] \\ &= \frac{m_I m_{III}}{\gamma} \left[ \frac{1}{\gamma} e^{-\gamma(a_{II}-s_0)} \left( e^{\gamma\frac{\Delta}{2}} - 1 \right) + e^{-\gamma\delta_T} \left[ \frac{1}{\gamma} \left( 1 - e^{-\gamma\frac{\Delta}{2}} \right) - 2e^{-\gamma\left(\frac{\Delta}{2}\right)} \left( \frac{\Delta}{2} \right) \right] \right] \end{aligned}$$

#### 4.1 Beregning av agglomerasjonsvirkninger med vei og bane

La oss først integrere ett enkelt banesegment i modellen. La oss som ovenfor anta at befolkningstettheten er konstant over segmentene  $[s_0, \frac{s_1+s_2-\delta_T}{2}]$  og  $[\frac{s_1+s_2+\delta_T}{2}, s_1]$ , i motsatt fall må vi splitte opp disse intervallene i flere segmenter etter tetthet. La oss illustrere likevekten med utgangspunkt i følgende situasjon, for så deretter utvikle en generell formel.



Per konstruksjon er alle interne ledd som i grunnmodellen:

$$\frac{2}{\gamma} \sum_{i=1}^5 \left[ (a_i - a_{i-1}) - \frac{1}{\gamma} (1 - e^{-\gamma(a_i - a_{i-1})}) \right] m_i^2$$

I forrige avsnitt beskrev vi kryssleddene mellom de ulike delsegmentene i  $[s_0, s_1]$ . Vi tar her først for oss kryssleddene fra lokaliseringer i  $[a_0, s_0]$  til lokaliseringen i segmentet  $[s_1, a_5]$ . Kryssleddet fra  $[a_0, a_1]$  til  $[s_1, a_5]$  har følgende mål:

$$e^{\gamma\Delta} \frac{2}{\gamma^2} \left[ (e^{-\gamma s_1} - e^{-\gamma a_5}) (e^{\gamma a_1} - e^{\gamma a_0}) \right] m_1 m_5$$

Merk at banealternativet øker den effektive kobling med faktor  $e^{\gamma\Delta}$ .

Endelig har vi koblingene fra segmenter i  $[a_0, s_0]$  til segmentet  $[a_4, s_1]$ . Her kan vi utnytte følgende egenskap: For enhver  $y < s_0$  er følgende tilfredsstillt:

$$d_{[a_4, s_1]}(y) = e^{-\gamma(s_0-y)} d_{[a_4, s_1]}(s_0)$$

der vi finner  $d_{[a_4, s_1]}(s_0)$  fra (1) ved å erstatte  $y$  med  $s_0$ .

$$d_{[a_4, s_1]}(s_0) = \frac{m_5}{\gamma} e^{-\gamma\delta_T} \left[ e^{\gamma(s_0+\delta_T-a_4)} + 1 - 2e^{-\gamma\frac{\Delta}{2}} \right]$$

som gir kryseffekt for segmentet  $[a_0, a_1]$  :

$$\begin{aligned}
 n_{[a_0, a_1]}^{[a_4, s_1]} &= m_1 \int_{a_0}^{a_1} d_{[a_4, s_1]}(y) dy \\
 &= m_1 d_{[a_4, s_1]}(s_0) \int_{a_0}^{a_1} e^{-\gamma(s_0 - y)} dy \\
 &= \frac{m_1 m_5}{\gamma^2} e^{-\gamma(s_0 + \delta_T)} [e^{\gamma a_1} - e^{\gamma a_0}] \left[ e^{\gamma(s_0 + \delta_T - a_4)} + 1 - 2e^{-\gamma \frac{\Delta}{2}} \right]
 \end{aligned}$$

og tilsvarende for segmentene  $[a_1, a_2]$  og  $[a_2, s_0]$ .

## 4.2 Flere noder

Generalisering til flere noder kan beregnes på samme måte. Men hvis nodene er koblet (f.eks én bane med 3 noder), må det korrigeres for tidsbesparing forbundet med ventetid. Konkret betyr det at formelen

$$d_{[a_4, s_1]}(y) = e^{-\gamma(s_0 - y)} d_{[a_4, s_1]}(s_0)$$

som uttrykker at lokaliseringen  $y$  replikerer lokaliseringen  $s_0$  diskontert med avstanden  $s_0 - y$ , ikke lenger er gyldig, hvis  $y$  ankommer noden  $s_0$  med bane fra noden  $s_{-1}$ . Grunnen er at ventetid ved noe  $s_0$  ikke lenger er relevant.

Det kan hensyntas ved å konstruere et hypotetisk individ lokalisert i  $s_0$  med avstand til  $s_1$  satt lik  $\delta_T - \alpha(s_0, s_1)$ , der  $\alpha(s_0, s_1)$  er den beregnede ventetidstillegget for  $s_0$ .

### 4.3 Illustrasjon – ytre Østfold

Vi illustrerer prinsippene ved en beregning av virkningene på effektive koblinger ved investeringer i forbedret jernbaneforbindelse i ytre Østfold.

La oss betrakte Fredrikstad nord til Halden sør som én økonomisk region bestående av 11 områder. Noder plasserer vi i områdene 2 ( $s_0$ , dvs. Fredrikstad), 6 ( $s_1$ , dvs. Sarpsborg) og 10 ( $s_2$ , dvs. Halden). Som en forenkling neglisjerer vi ventetidskorreksjonen for reiser fra  $s_0$  til  $s_2$ .

Som over deler vi opp linjestykket mellom nodene, f.eks.  $[s_0, s_1]$ , i delsegmenter, der segmentene  $\left[s_0, \frac{s_1+s_0-\delta_T^{01}}{2}\right]$  og  $\left[\frac{s_1+s_0+\delta_T^{01}}{2}, s_1\right]$  er særlig viktige i den forstand at det er i de to segmentene en finner de "indifferente" individene – dvs individene som er indifferente mellom togalternativet og vei. Tilsvarende for linjestykket  $[s_1, s_2]$ , der følgende segmenter  $\left[s_1, \frac{s_1+s_2-\delta_T^{12}}{2}\right]$  og  $\left[\frac{s_1+s_2+\delta_T^{12}}{2}, s_2\right]$  blir sentrale i beregningen.

Denne inndelingen generer en akse med følgende avgrensninger av områder:

$$\left[ a_0, a_1, s_0, \frac{s_1 + s_0 - \delta_T^{01}}{2}, a_2, \dots, a_5, \frac{s_1 + s_0 + \delta_T^{01}}{2}, s_1, \frac{s_1 + s_2 - \delta_T^{12}}{2}, a_6, \dots, a_9, \frac{s_1 + s_2 + \delta_T^{12}}{2}, s_2, a_{10}, a_{11} \right].$$

Notasjonsmessig er det hensiktsmessig å kunne referere til denne sekvensen som

$$[\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{18}],$$

der  $\alpha_2 = s_0$ ,  $\alpha_9 = s_1$ , og  $\alpha_{16} = s_2$  (med  $\alpha_3 = \frac{s_1+s_0-\delta_T^{01}}{2}$ , ...osv). Tilsvarende deler vi nå segmentet inn i områder  $m = [m_1, \dots, m_{18}]$ .

Merk at vi forutsetter at segmentene  $\left[s_0, \frac{s_1+s_0-\delta_T^{01}}{2}\right]$ ,  $\left[\frac{s_1+s_0+\delta_T^{01}}{2}, s_1\right]$ ,  $\left[s_1, \frac{s_1+s_2-\delta_T^{12}}{2}\right]$  og  $\left[\frac{s_1+s_2+\delta_T^{12}}{2}, s_2\right]$  har uniformt fordelte befolkninger (dvs punktene  $\frac{s_1+s_0-\delta_T^{01}}{2} = \alpha_3$ ,  $\frac{s_1+s_0+\delta_T^{01}}{2} = \alpha_6$ , osv er de punktene som ligger nærmest nodene.)

Sammenlignet med modellen uten noder har vi nå to nye typer kryssledd som er viktige. For det første er det kryssleddene som fanger opp bruk av tog for individer med lokaliseringer *mellom* noder. For koblinger fra  $\left[s_0, \frac{s_1+s_0-\delta_T^{01}}{2}\right]$  til  $[\alpha_8, s_1]$  har vi

$$n_{\left[s_0, \frac{s_1+s_0-\delta_T^{01}}{2}\right]}^{[\alpha_8, s_1]} = \frac{m_3 m_9}{\gamma} \left[ \frac{1}{\gamma} e^{-\gamma(\alpha_8-s_0)} \left( e^{\gamma \frac{\Delta_{01}}{2}} - 1 \right) + e^{-\gamma \delta_T^{01}} \left[ \frac{1}{\gamma} \left( 1 - e^{-\gamma \frac{\Delta_{01}}{2}} \right) - 2e^{-\gamma \left( \frac{\Delta_{01}}{2} \right)} \left( \frac{\Delta_{01}}{2} \right) \right] \right],$$

der  $\Delta_{01} = s_1 - s_0 - \delta_T^{01}$ . For koblinger fra  $\left[s_1, \frac{s_1+s_2-\delta_T^{12}}{2}\right]$  til  $[\alpha_{15}, s_2]$  har vi tilsvarende

$$n_{\left[s_1, \frac{s_1+s_2-\delta_T^{12}}{2}\right]}^{[\alpha_{15}, s_2]} = \frac{m_{10} m_{16}}{\gamma} \left[ \frac{1}{\gamma} e^{-\gamma(\alpha_{15}-s_1)} \left( e^{\gamma \frac{\Delta_{12}}{2}} - 1 \right) + e^{-\gamma \delta_T^{12}} \left[ \frac{1}{\gamma} \left( 1 - e^{-\gamma \frac{\Delta_{12}}{2}} \right) - 2e^{-\gamma \left( \frac{\Delta_{12}}{2} \right)} \left( \frac{\Delta_{12}}{2} \right) \right] \right],$$

der  $\Delta_{12} = s_2 - s_1 - \delta_T^{12}$ .

Dernest er det antallet effektive koblinger til høyre for lokaliseringer *på* hver av de tre nodene. For lokalisasjon  $s_2$  får vi

$$d_{[s_2, \alpha_{18}]}(s_2) = (e^{-\gamma s_2} - e^{-\gamma \alpha_{17}}) e^{\gamma s_2} \frac{m_{17}}{\gamma} + (e^{-\gamma \alpha_{17}} - e^{-\gamma \alpha_{18}}) e^{\gamma s_2} \frac{m_{18}}{\gamma}.$$

For lokalisasjon  $s_1$  får vi

$$d_{[s_1, \alpha_{18}]}(s_1) = e^{-\gamma \delta_T^{12}} d_{[s_2, \alpha_{18}]}(s_2) + \sum_{i=10}^{15} \left( e^{-\gamma \alpha_{i-1}} - e^{-\gamma \alpha_i} \right) e^{\gamma s_1} \frac{m_i}{\gamma} + d_{[\alpha_{15}, s_2]}(s_1)$$

som kan skrives

$$\begin{aligned} d_{[s_1, \alpha_{18}]}(s_1) &= e^{-\gamma \delta_T^{12}} d_{[s_2, \alpha_{18}]}(s_2) + \sum_{i=10}^{15} \left( e^{-\gamma \alpha_{i-1}} - e^{-\gamma \alpha_i} \right) e^{\gamma s_1} \frac{m_i}{\gamma} \\ &\quad + e^{-\gamma \delta_T^{12}} \left[ 1 - e^{-\gamma \left( \frac{s_2 - s_1 - \delta_T^{12}}{2} \right)} \right] \frac{m_{16}}{\gamma}. \end{aligned}$$

Endelig for lokalisasjon  $s_0$  får vi

$$\begin{aligned} d_{[s_0, \alpha_{18}]}(s_0) &= e^{-\gamma \delta_T^{01}} d_{[s_1, \alpha_{18}]}(s_1) + \sum_{i=3}^8 \left( e^{-\gamma \alpha_{i-1}} - e^{-\gamma \alpha_i} \right) e^{\gamma s_0} \frac{m_i}{\gamma} \\ &\quad + e^{-\gamma \delta_T^{01}} \left[ 1 - e^{-\gamma \left( \frac{s_1 - s_0 - \delta_T^{01}}{2} \right)} \right] \frac{m_9}{\gamma}. \end{aligned}$$

Vi kan nå uttrykke mengden av effektive koblinger slik på følgende måte

$$\begin{aligned}
N = \frac{2}{\gamma} & \left[ \begin{aligned}
& \sum_{i=1}^{18} \left[ (\alpha_i - \alpha_{i-1}) - \frac{1}{\gamma} (1 - e^{-\gamma(\alpha_i - \alpha_{i-1})}) \right] m_i^2 \\
& + \frac{1}{\gamma} \sum_{i=17}^{17} \sum_{j=i+1}^{18} [(e^{-\gamma\alpha_{j-1}} - e^{-\gamma\alpha_j}) (e^{\gamma\alpha_i} - e^{\gamma\alpha_{i-1}})] m_i m_j \\
& + \frac{1}{\gamma} \sum_{i=11}^{15} \sum_{j=i+1}^{16} [(e^{-\gamma\alpha_{j-1}} - e^{-\gamma\alpha_j}) (e^{\gamma\alpha_i} - e^{\gamma\alpha_{i-1}})] m_i m_j \\
& \quad + \sum_{i=11}^{16} [(e^{-\gamma(s_2 - \alpha_i)} - e^{-\gamma(s_2 - \alpha_{i-1})})] d_{[s_2, \alpha_{18}]}(s_2) m_i \\
& \quad \quad \quad + \gamma n_{[s_1, \alpha_{10}]}^{[\alpha_{15}, s_2]} \\
& \quad + \frac{1}{\gamma} \sum_{j=11}^{15} [(e^{-\gamma\alpha_{j-1}} - e^{-\gamma\alpha_j}) (e^{\gamma\alpha_{10}} - e^{\gamma\alpha_9})] m_{10} m_j \\
& \quad \quad + (1 - e^{-\gamma(\alpha_{10} - s_1)}) e^{-\gamma\delta_T^{12}} d_{[s_2, \alpha_{18}]}(s_2) m_{10} \\
& + \frac{1}{\gamma} \sum_{i=4}^8 \sum_{j=i+1}^9 [(e^{-\gamma\alpha_{j-1}} - e^{-\gamma\alpha_j}) (e^{\gamma\alpha_i} - e^{\gamma\alpha_{i-1}})] m_i m_j \\
& \quad + \sum_{i=4}^9 [(e^{-\gamma(s_1 - \alpha_i)} - e^{-\gamma(s_1 - \alpha_{i-1})})] d_{[s_1, \alpha_{18}]}(s_1) m_i \\
& \quad \quad \quad + \gamma n_{[s_0, \alpha_3]}^{[\alpha_8, s_1]} \\
& \quad + \frac{1}{\gamma} \sum_{j=4}^8 [(e^{-\gamma\alpha_{j-1}} - e^{-\gamma\alpha_j}) (e^{\gamma\alpha_3} - e^{\gamma\alpha_2})] m_3 m_j \\
& \quad \quad + (1 - e^{-\gamma(\alpha_3 - s_0)}) e^{-\gamma\delta_T^{01}} d_{[s_1, \alpha_{18}]}(s_1) m_3 \\
& + \frac{1}{\gamma} \sum_{i=1}^1 \sum_{j=i+1}^2 [(e^{-\gamma\alpha_{j-1}} - e^{-\gamma\alpha_j}) (e^{\gamma\alpha_i} - e^{\gamma\alpha_{i-1}})] m_i m_j \\
& \quad + \sum_{i=1}^2 [(e^{-\gamma(s_0 - \alpha_i)} - e^{-\gamma(s_0 - \alpha_{i-1})})] d_{[s_0, \alpha_{18}]}(s_0) m_i
\end{aligned} \right].
\end{aligned}$$

## Referanseliste

- Ahlfeldt, G. M., Redding, S. J., Sturm, D. M., & Wolf, N. (2014). The economics of density: Evidence from the Berlin Wall. *NBER Working Paper* nr. 20354.
- Behrens, K., G. Duranton, og F. Robert-Nicoud (2014). Productive Cities: Sorting, Selection, and Agglomeration. *Journal of Political Economy*, Vol. 122, 3: 507-553.
- Bernard, A.B., Moxnes, A. og Saito, Y.U. (2015). Production Networks, Geography and Firm Performance. *NBER Working Paper* nr. 21082.
- Casolino, G. og Kerr, W.R. (2014). Agglomeration and Innovation. *NBER Working Paper* nr. 20367.
- Combes, P.P., Duranton, G., og Gobillon., L. (2008). Spatial wage disparities: Sorting matters! *Journal of Urban Economics* 63(2): 723-742.
- Davis, D.R og Dingel, J.I (2012). A Spatial Knowledge Economy. *NBER Working Paper* nr. 18188.
- Davis, D.R og Dingel, J.I (2014). The Comparative Advantage of Cities. *NBER Working Paper* nr. 20602.
- Davis, M.A, Fisher, J.D., and Whited, T.M. (2014). Macroeconomic Implications of Agglomeration. *Econometrica* 82, 731-764.
- Duranton, G. og Overman, H.G . (2005). Testing for Localization Using Micro-Geographic Data. *Review of Economic Studies* 72, 1077-1106.
- Eeckhout, J., Pinheiro, R. og Schmidheiny, K (2014). Spatial Sorting. *Journal of Political Economy* vol. 122(3): 554 - 620.
- Graham, D., Gibbons, S. og Martin, R. (2009). Transport Investments and the Distance Decay of Agglomeration Effects. Working paper.
- Heggedal, T.R, E.R. Moen, and C. Riis (2014): Samfunnsøkonomiske virkninger av fer-gefri E-39 Stavanger-Bergen. *CREAM Publication* nr. 2-2014.
- Rosenthal, S. S. and W. C. Strange (2004): Evidence on the nature and sources of agglomeration economies, in Henderson, J. V. and J.-F. Thisse (eds.), *Handbook of Urban and Regional Economics*, Volume 4, Cities and Geography, North Holland.
- Venables, A.J. (2007). Evaluating Urban Transport Improvements: Cost-Benefit Analysis in the Presence of Agglomeration and Income Taxation. *Journal of Transport Economics and Policy*, Vol. 41, 173-188.

## **Center for Research in Economics and Management (CREAM)**

Handelshøyskolen BI / BI Norwegian Business School

0442 Oslo, Norway

The objective of CREAM is to provide research and analysis in the area of industrial economics and labor economics with applications to management, and provide research-based analysis for decision makers in public and private sector.